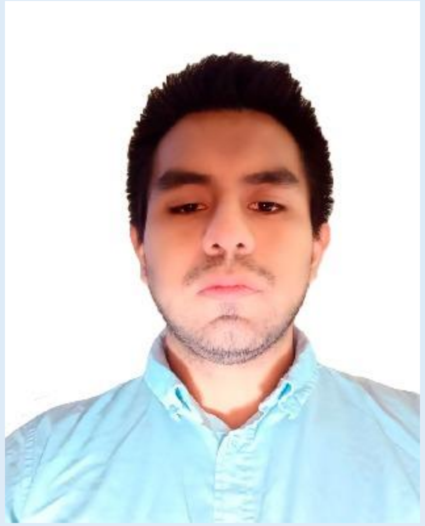

Profesor:
Ricardo Espino Lizama

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

1. –Sumatoria

Sea a_k *una sucesión definida en todo* $\mathbb{Z}^+$*, se define:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

y se lee: $\boldsymbol{Sumatoria\ desde\ k = 1\ hasta\ k = n\ de\ a_k}$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{5}(k^2+1) = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) + (4^2+1) + (5^2+1) = 60$$

De manera general también podemos definir:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \qquad Donde\ m, n \in \mathbb{Z}^+ \quad \wedge \quad n \geq m$$

2. –Propiedades

1. – *La sumatoria* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *posee* n sumandos

2. – *La sumatoria* $\sum_{k=m}^{n} a_k$ *posee* n−m+1 sumandos

3. – $\sum_{k=1}^{n} c = cn$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{11} 3 = \underbrace{3+3+3+3\ldots 3}_{11\ sumandos} = 3.11 = 33$$

4. – $\sum_{k=m}^{n} c = c(n-m+1)$

Ejemplo:

$$\sum_{k=5}^{19} 3 = \underbrace{3+3+3+3\ldots 3}_{19-5+1=15\ sumandos} = 3.15 = 45$$

$$5.- \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

Ejemplo: $\sum_{k=1}^{17} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k + \sum_{k=10}^{17} a_k$

$$6.- \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}$$

Ejemplo: $\sum_{k=1}^{8} k^2 = \sum_{k=1}^{8} (8-k+1)^2 = \sum_{k=1}^{8} (9-k)^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots 8^2$

$8^2 + 7^2 + 6^2 + \cdots 1^2$

$$7.- \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$8.- \quad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

3. –Sumatorias finitas notables

$$1.- \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2.- \quad \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

$$3.- \quad \sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

$$4.- \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$5.- \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4.- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$[2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3] - [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots n^3] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3(n)(n+1)}{2} + n$$

operando ... $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6.-\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$7.-\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$8.-\ \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)r) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$9.-\ \sum_{k=1}^{n} a_1 . r^{k-1} = a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad , r \neq 1$$

$$10.-\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$11.-\ \sum_{k\ impar}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

$$12.-\ \sum_{k\ par}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

$$13.-\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$14.-\ \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

Convolución de Vandermonde

07. Determine $\sum_{k=1}^{n} k.2^{k-1}$

A) $(n-1) \times 2^n$ B) $1 + (n-1) \times 2^n$

C) 2^n D) $(n+1) \times 2^n$

E) $2 + (n-1)\, 2^{n+1}$

$$S = \sum_{k=1}^{n} k.2^{k-1}$$

$$S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + 5.2^4 + \cdots (n-1).2^{n-2} + n.2^{n-1}$$

$$2S = 2.1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \cdots (n-1).2^{n-1} + n.2^n$$

$-$

$$-S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n.2^n$$

$$-2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n - n.2^{n+1}$$

$-$

$$S = 1 - n.2^n - 2^n + n.2^{n+1}$$

$$S = 1 - n.2^n - 2^n + n.2.2^n$$

$$S = 1 + 2^n(-n - 1 + 2n)$$

$$S = 1 + 2^n(n-1)$$

4. –Series infinitas

Sea a_k *una sucesión definida en todo* $\mathbb{Z}^+$

en base a esta sucesión definiremos a otra sucesión S_n *de la siguiente forma*

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Es decir:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$$

y así sucesivamente, con ***término n − ésimo*** $\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$

a esta sucesión se le denomina sucesión de ***SUMAS PARCIALES***

$Ejemplo$:

$$\boldsymbol{Sea\ la\ sucesión\ a_k = \frac{1}{k(k+1)}}$$

$en\ base\ a\ esta\ sucesión\ definiremos\ a\ otra\ sucesión\ S_n\ de\ la\ siguiente\ forma$

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

$y\ así\ sucesivamente, con\ término\ n - ésimo$:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{n+1}}$$

$5.-$ *Convergencia de una serie infinita*

Sea una sucesión a_k *cuya sucesión de sumas parciales es* S_n

es decir: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ ***entonces se dice que la serie converge a S y además:***

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$$

la cual será denominada ***SERIE INFINITA***

En caso contrario se dirá que la serie diverge.

Ejemplo: $\boldsymbol{Sea\ la\ sucesión\ a_k = \frac{1}{k(k+1)}}$

en base a esta sucesión ya se había definido a su ***sucesión de SUMAS PARCIALES***

con término n − ésimo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{n+1}$$

Calculando la convergencia de dicha sucesión de sumas parciales

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

por lo tanto la serie converge a 1

y además la serie infinita $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1$$

Sea la sucesión $a_k = \frac{1}{2^k}$ definimos a otra sucesión $\{S_n\} = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n.$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

entonces $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; \ldots\right\}$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

y a esta sucesión se le llama la sucesión de ***SUMAS PARCIALES***

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

cuyo término general sería $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

$$\boldsymbol{Sea\ b_k = \frac{2}{k^2+2k}}$$

$$\boldsymbol{Calcular:\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

SOLUCIÓN 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$Sea\ b_k = \frac{2}{k^2+2k}$$

$$Calcular: \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

SOLUCIÓN 2: *Primero calculamos la sucesión de SUMAS PARCIALES* $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$S_1 = b_1 = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = b_1 + b_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} = \frac{11}{12}$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} = \frac{21}{20}$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_n$$

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \cdots \frac{2}{n^2+2n}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2+5n}{2n^2+6n+4}$$

$$Calcular: \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+6n+4} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ converge\ a\ \frac{3}{2}$$

6. $-$*Propiedades*

$\mathbf{1.-}$ ***Si la serie*** $\boldsymbol{\sum a_k}$ ***converge entonces la sucesión*** $\boldsymbol{\{a_k\}}$ ***converge a*** $\mathbf{0}$

$YAPA$: *Si la sucesión* $\{a_k\}$ *converge a cero esto no significa necesariamente que la serie* $\sum a_k$ *sea convergente*

Por ejemplo: $\{a_k\} = \dfrac{1}{k}$ *la cual es una suc que converge a* 0 *PEEEERO* $\sum \dfrac{1}{k}$ *es divergente* (∞)*(serie armónica)*

$\mathbf{2.-}$ ***Si la sucesión*** $\boldsymbol{\{a_k\}}$ ***no converge a*** $\mathbf{0}$ ***entoncesla serie*** $\boldsymbol{\sum a_k}$ ***diverge.***

$3.-$ *Si* $\sum a_k$ *y* $\sum b_k$ *son ambas series convergentes a* S_1 *y* S_2 *respectivamente entonces*:

$$\sum a_k \pm b_k \ \textit{también es convergente y converge a } S_1 \pm S_2$$

$$\sum c a_k \ \textit{también es convergente y converge a } cS_1$$

7. –Series infinitas notables

1. –Serie armónica

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots}$$

esta serie es ***DIVERGENTE***

2. –Serie de Basilea

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots}$$

esta serie es ***convergente y converge a*** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{6}}$

en general a este tipo de series se les denomina las $\boldsymbol{P-series}$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots}$$

La cual converge para todo $p>1$ y diverge en cualquier otro caso

$3.-$*Serie Geométrica*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots}$$

esta serie ***solo converge si*** $|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$ *y en dicho caso* ***converge al valor*** $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{r}}$

a esto también se le conoce como ***SUMA LÍMITE***

$4.-$*Serie de potencias*

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

$$\boxed{senx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

$$\boxed{cosx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \ldots}$$

$8.-$*Criterios de convergencia para series de términos positivos*

$Sean \sum a_k \quad y \sum b_k$ *dos series de términos positivos*

$8.1.$ *CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA*

$1.-Si \;\; 0 < a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad y \sum b_k \; converge$ $\rightarrow \sum a_k \quad converge$

$2.-Si \;\; 0 < a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad y \sum a_k \; diverge$ $\rightarrow \sum b_k \quad diverge$

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{1+\sqrt{6n}}$ es convergente.

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+1}$ es convergente.

III. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ es convergente.

Indique sus valores de verdad.

A) FFV B) FVV C) VVV

D) FVF E) FFF

I.–FALSO

Ya que la sucesión $\frac{\sqrt{3n}}{1+\sqrt{6n}}$ *converge a* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *entonces la serie es divergente*

II.–VERDADERO

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad n^3+1 > n^3$ *entonces* $0 < \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$

y también $0 < \frac{2n+1}{n^3+1} < \frac{2n+1}{n^3}$ *es decir* $0 < \frac{2n+1}{n^3+1} < \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}$

y $\sum \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ ***es convergente (SERIE P)***

Por lo tanto por el CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA $\sum \frac{2n+1}{n^3+1}$ ***ES CONVERGENTE***

III.–VERDADERO

$\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ ***es la SERIE P con*** $p = \frac{4}{3} > 1$ ***asi que CONVERGE***

8.2. CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE

Sean $\sum a_k$ *y* $\sum b_k$ *dos series de términos positivos*

$$\textbf{Sea } L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L > 0 \quad \text{entonces ambas series son simultáneamente convergentes o divergentes} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L = 0 \quad y \sum b_k \text{ es convergente entonces } \sum a_k \text{ también es convergente} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = +\infty \quad y \sum b_k \text{ es divergente entonces } \sum a_k \text{ también es divergente} \end{cases}$$

15. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2.\text{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\right)$; de los siguientes enunciados:

a. La serie converge a 3/2
b. La serie converge a 1/3
c. La serie es divergente
d. La serie es acotada

Cuáles son correctas.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) solo IV E) II y IV

$$Sea \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n} \ (SERIE\ DIVERGENTE)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 sen\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=+\infty \quad y\sum b_k\ es\ divergente\ entonces\sum a_k\ también\ es\ divergente}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 sen\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty \ \ y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\ (SERIE\ DIVERGENTE)\ \ entonces\ \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}n^2 sen\left(\frac{2}{n}\right)}\quad \boldsymbol{es\ DIVERGENTE}$$

$8.3.$ *CRITERIO DE LA RAZÓN O DE D´ALAMBERT*

$$Sean \sum a_k \ una\ serie\ de\ términos\ positivos$$

$$\boldsymbol{Sea\ L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} Si\ \ L < 1 \ \ entonces \sum a_k \ converge \\ Si\ L = 1 \ \ \ entonces\ no\ se\ puede\ afirmar\ nada \\ Si\ L > 1 \ \ entonces \sum a_k \ \ diverge \end{cases}}$$

8.3. CRITERIO DE LA RAÍZ O DE CAUCHY

$Sean \sum a_k$ *una serie de términos positivos*

$$Sea\ L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

$$\begin{cases} Si\ \ L < 1\ \ entonces \sum a_k\ converge \\ Si\ L = 1\ \ \ entonces\ no\ se\ puede\ afirmar\ nada \\ Si\ L > 1\ \ entonces \sum a_k\ \ diverge \end{cases}$$

$\underline{9. -Convergencia\ Absoluta}$

$Sea \sum a_k \quad una\ serie\ tal\ que \sum |a_k| \quad es\ una\ serie\ convergente$

$entonces \sum a_k \quad también\ es\ convergente$

$y\ se\ le\ dice\ ABSOLUTAMENTE\ CONVERGENTE$

09. Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(\mathrm{n}+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(\mathrm{n}+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$= \mathbf{1}$$

10. Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$S = 1 + \frac{2}{9} + \frac{26}{3^6} + \frac{242}{3^{10}} + \ldots$$

A) $\frac{3}{80}$ B) $\frac{19}{80}$ C) $\frac{59}{80}$

D) $\frac{91}{80}$ E) $\frac{101}{80}$

$$S = 1 + \frac{3-1}{3^2} + \frac{3^3-1}{3^6} + \frac{3^5-1}{3^{10}} + \cdots.$$

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^{10}} + \cdots.$$

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + \cdots\right)$$

$$S = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3^2}} - \left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3^4}}\right)$$

$$S = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} - \left(\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{81}}\right)$$

$$S = 1 + \frac{3}{8} - \left(\frac{9}{80}\right)$$

$$\boldsymbol{S = \frac{101}{80}}$$

13. Determine la suma de la serie:

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=2}^{30}(3i+2j)$$

A) 157325 B) 157326 C) 157327

D) 157328 E) 156329

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=2}^{30} 3i+2j$$

$$\sum_{i=1}^{50}(3i+4+3i+6+3i+8+\cdots+3i+60)$$

$$\sum_{i=1}^{50}(29.3i+4+6+8+\cdots+60)$$

$$\sum_{i=1}^{50}(87i+928) = \sum_{i=1}^{50}(87i)+\sum_{i=1}^{50}(928)$$

$$= 87\sum_{i=1}^{50}(i)+\sum_{i=1}^{50}(928)$$

$$= \frac{\mathbf{87.50.51}}{\mathbf{2}} + \mathbf{928.50} = \mathbf{157325}$$

23. En relación a la serie:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\pi k+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{k+2}\right]$$

Determine el valor de verdad de los enunciados siguientes:

I. Es divergente

II. Converge a cero

III. Convergente a: $\dfrac{\pi^2+\pi-1}{\pi^2(\pi-1)^2}$

A) VVV B) VFV C) FVV

D) FFV E) FFF

E) 2

$$S=(\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^3+(2\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^4+(3\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^5+\cdots$$

$$\pi S=(\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+(2\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^3+(3\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^4+\cdots$$

Restando:

$$S(\pi-1)=(\pi+1)\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\right)^3+\left(\frac{1}{\pi}\right)^4+\cdots$$

$$S(\pi-1)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi}+\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\right)^3+\left(\frac{1}{\pi}\right)^4+\cdots$$

$$S(\pi-1)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}}$$

$$S(\pi-1)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi-1}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{\pi^2+\pi-1}{\pi^2(\pi-1)^2}}$$

PITAGORAS
ACADEMIA